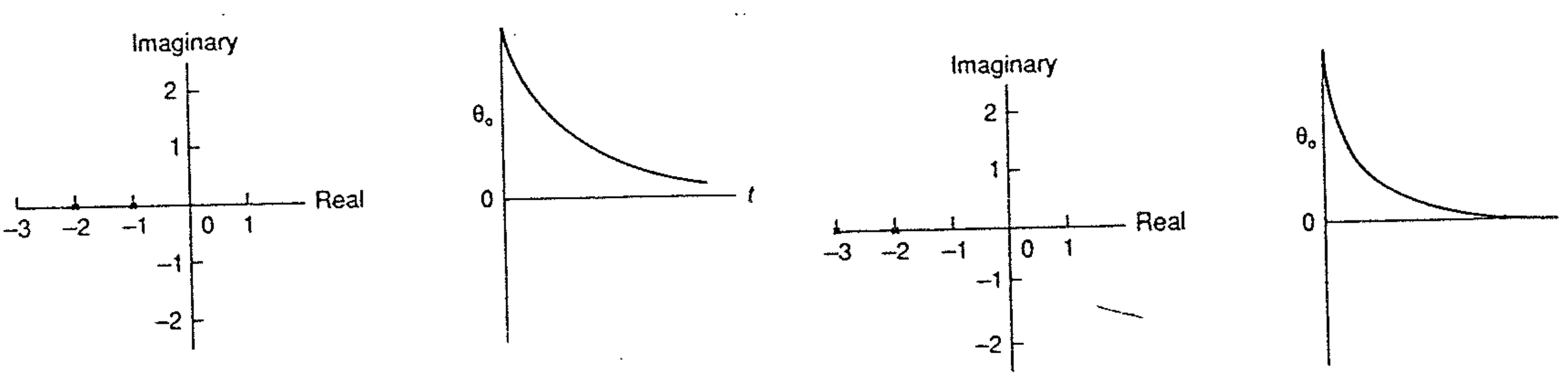
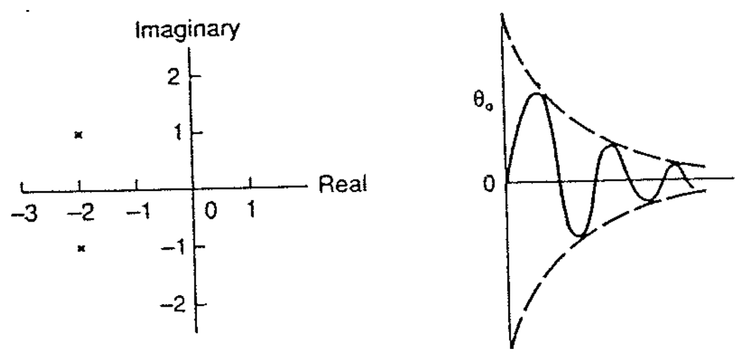
Глава 9. Анализа со трагови на корени

Корените на именителот на преносната функција на системот (преносна функција на затворена врска), се нарекуваат полови на системот и го одредуваат општиот облик на преодниот одзив ед системот. На слика 9.1 прикажано е како промената на положбата на половите p_1 и p_2 на систем со преносна функција

$$G(s)=\frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

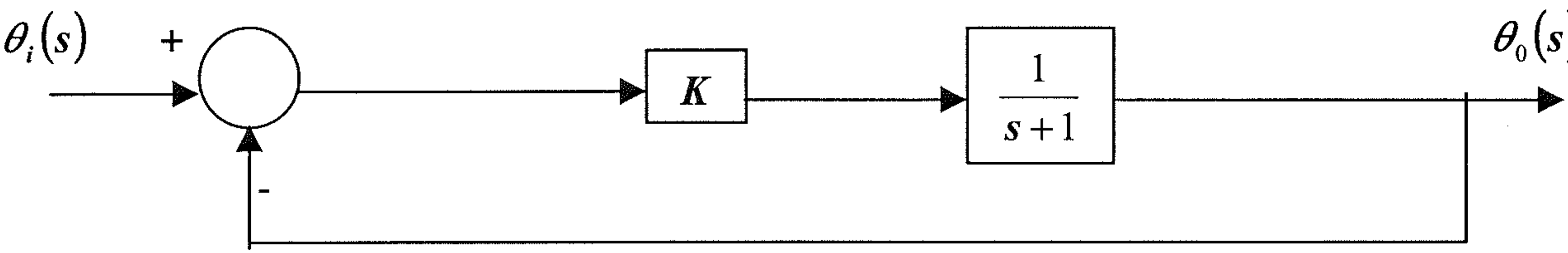
влијае врз преодниот одзив од системот кога на влез се доведе импулсна функција. Во оваа глава анализирана е зависноста помеѓу однесувањето на системот и положбата на неговите полови. Техниката што се користи за оваа анализа е наречена метод на трагови на корени.





9.2 Траг на корени за систем од прв ред

Нека е даден систем од прв ред (слика 9.2):

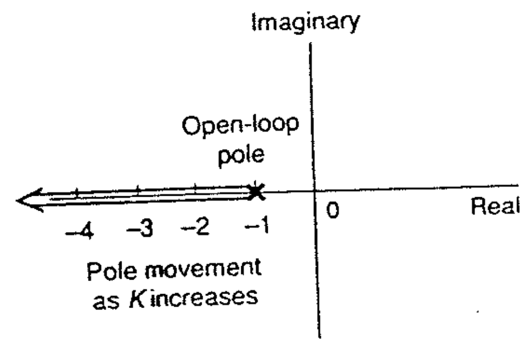


Слика 9.2. Систем од прв ред

Системот ја има следната преносна функција на затворена врска:

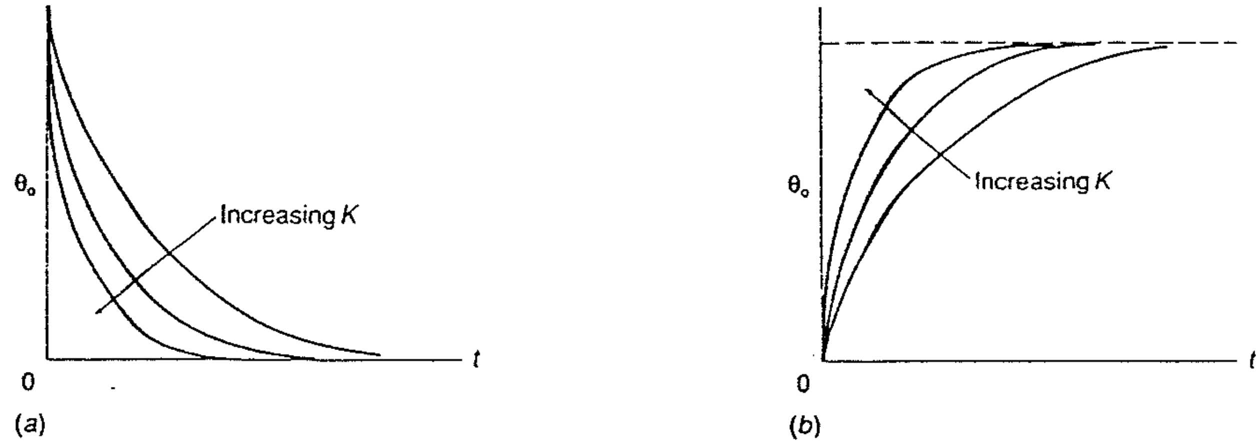
$$G(s)=\frac{K/(s+1)}{1+\left(K/(s+1)\right)}=\frac{K}{s+(1+K)}$$

Системот има еден пол во $-(1+K)$. Кога $K=0$ полот е во -1 и со пораст на вредноста на K вредноста на полот постанува се повеќе негативна , како што е прикажано на слика 9.3. Линијата што покажува како се менува положбата на полот со промената на K од нула до бесконечност е наречена траг на корени.



Слика 9.3. Траг на корени за системот на слика 9.2

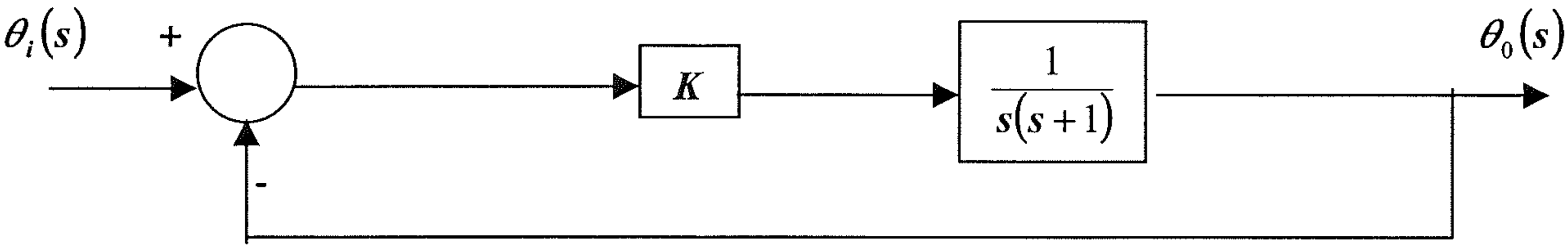
Со оглед дека вредноста на коренот зависи од вредноста на K, и одзивот од системот зависи од вредноста на K. На слика 9.4 прикажано е како одзивот од системот за импулсен и отскочен влез зависи од вредноста на K. Кога $K=0$ преносната функција на системот постанува преносна функција на отворена врска, и заради тоа вредноста на коренот на полиномот во именителот на преносната функција на системот кога $K=0$ е наречена пол на отворена врска.



Слика 9.4. Одзив од системот на слика 9.2 за (а) импулсен влез; (б) отскочен влез

9.3 Траг на корени за систем од втор ред

Нека е даден систем од втор ред:



Слика 9.5. Систем од втор ред

Системот ја има следната преносна функција на затворена врска:

$$G(s)=\frac{K/s(s+1)}{1+\left(K/s(s+1)\right)}=\frac{K}{s^{2}+s+K}$$

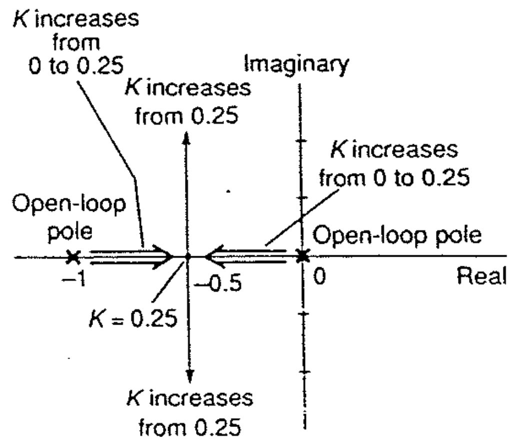
Корените на именителот на преносната функција се:

$$p=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(1-4K)}$$

Кога $K=0$ тогаш $p=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}$, т.е. корените (половите) се во 0 и -1. Кога $K=\frac{1}{4}$ тогаш обата корени (полови) се во $p=-\frac{1}{2}$. За вредности на K помеѓу 0 и 1/4, коренот во 0 постанува се повеќе негативен и се приближува кон -1/2, додека коренот во -1 постанува се помалку негативен и се приближува кон -1/2 како што е прикажано на слика 9.6.

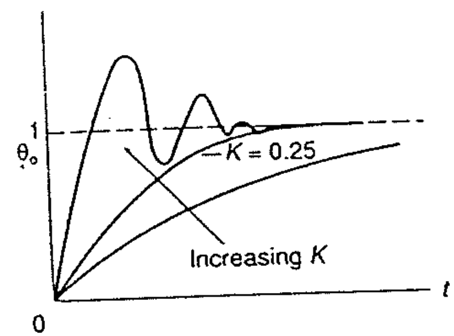
$\sqrt{3}/2$

За $K=1$ корените се $-\frac{1}{2}\pm j3$. За сите вредности на K поголеми од 0.25 се добива пар комплексни корени, со константен реален дел еднаков на -1/2 и имагинарен дел чија вредност расте со пораст на K.



Слика 9.6. Траг на корени за системот на слика 9.5

Со оглед дека вредноста на корените зависи од вредноста на K, и одзивот од системот зависи од вредноста на K. На слика 9.7 прикажан е одзивот од системот за различни вредности на K за единечен отскочен влез. За вредности на K помеѓу 0 и 0.25 системот е наткритично пригушен, за K =0.25 системот е критично пригушен и за K поголемо од 0.25 системот е поткритично пригушен и доаѓа до појава на осцилаторен излез од системот.



Слика 9.7. Одзив од системот на слика 9.5 за единечен отскочен влез

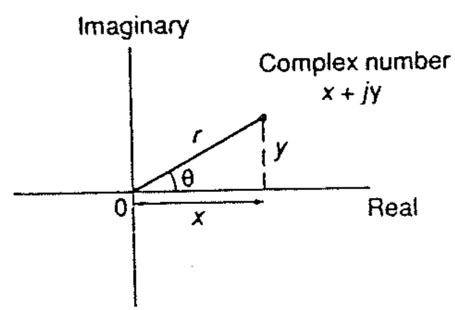
Именителот на преносната функција, т.е $\left(s^2+s+K\right)$ може да се напише во облик $\left(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2\right)$ (види Глава 2 и Глава 3), каде ω_n е природната аголна фреквенција на осцилирање и ξ е коефициентот на пригушување. Значи за овој систем $\omega_n^2=K$ и $2\xi\omega_n=1$, односно $\omega_n=\sqrt{K}$ и $\xi= 1/\left(2\sqrt{K}\right)$. Значи ако K расте од 0.25 природната фреквенција расте, а коефициентот на пригушување опаѓа.

9.4 Поларен облик на комплексни броеви

На графикот на слика 9.8 прикажан е комплексниот број $(x+jy)$ при што на y-оската е имагинарниот дел на бројот, и на x-оската е реалниот дел на бројот. Ако $r=|x+jy|=\sqrt{x^2+y^2}$ е модулот (големината) на комплексниот број, и $\theta=arctg\frac{y}{x}$ е аргументот (аголот) на комплексниот број, важи $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, односно

$$x+jy=r(\cos\theta+j\sin\theta)=r\angle\theta$$

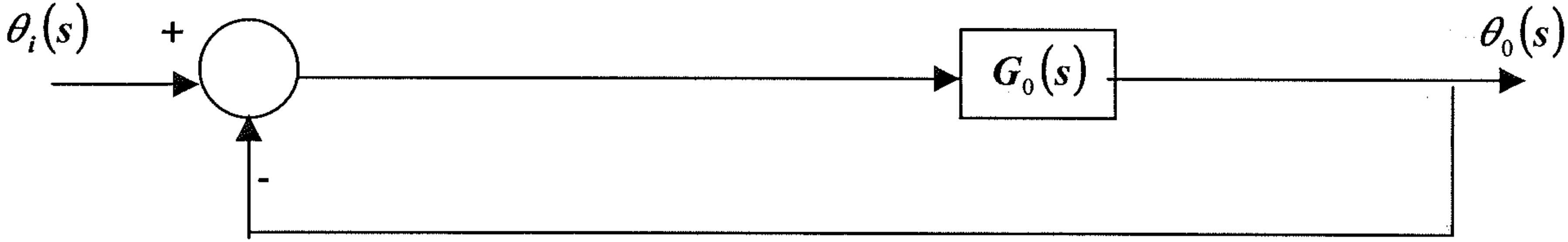
Претставувањето на комплексниот број преку дефинирање на неговиот модул и аргумент е претставување на комплексниот број во поларен облик.



Слика 9.8. Поларен облик на комплексен број

9.5 Траг на корени за систем со затворена врска

Нека е даден следниот општ систем со затворена врска:



Слика 9.~~5~~9. Систем со затворена врска

Системот ја има следната преносна функција на затворена врска:

$$G(s)=\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \tag{9.1}$$

Половите на системот се вредностите на s за кои именителот е нула, т.е.

$$1+G_0(s)=0$$

или

$$G_0(s)=-1 \tag{9.2}$$

Ако преносната функција во директната гранка $G_0(s)$ има полови $p_1, p_2, ..., p_n$, нули $z_1, z_2, ..., z_m$, и K е константа, тогаш $G_0(s)$ може да се напише во облик:

$$G_0(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3).........(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3).........(s-p_n)} \tag{9.3}$$

За точките на трагот на корените (половите на системот со затворена врска) мора да важи (9.2)

$$G_0(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3).........(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3).........(s-p_n)} = -1 \tag{9.4}$$

Бидејќи s е комплесна променлива, равенката (9.4) може да се напише во поларен облик (види параграф 9.4). Со користење на поларниот облик на (9.4) можат да се одредат два услови што треба да бидат задоволени за да една точка од s рамнината лежи на трагот на корените. Тие два услови се следните.

Услов 1. Со оглед дека производот на два комплексни броја има модул што е еднаков на производот на модулите на броевите и количникот на два комплексни броја има модул што е еднаков на количникот од модулите на броевите, може да се напише првиот услов за да една точка од s рамнината лежи на трагот на корените:

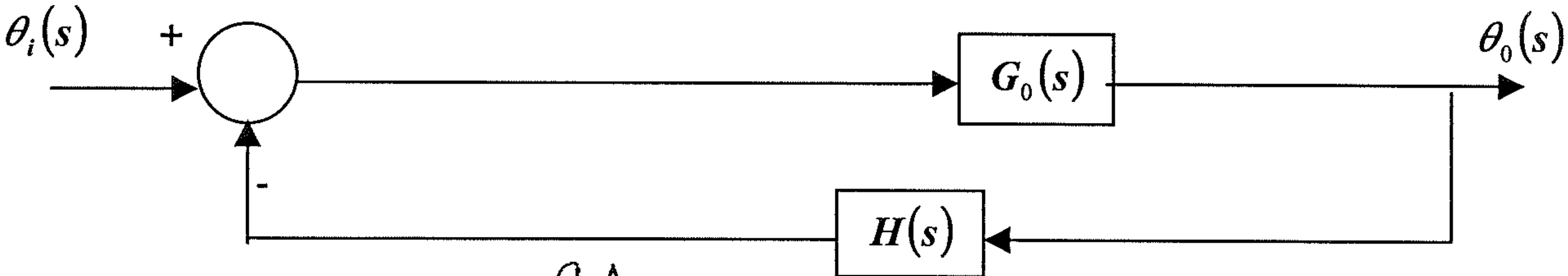
$$\frac{K|s-z_1||s-z_2||s-z_3|\ldots\ldots|s-z_m|}{|s-p_1||s-p_2||s-p_3|\ldots\ldots|s-p_n|}=1 \tag{9.5}$$

Услов 2. Со оглед дека аргументот на производот на два комплексни броја има аргумент што е сума од аргументите на броевите, и количникот на два комплексни броја има аргумент што е разлика од аргументите на броевите, може да се напише вториот услов за да една точка од s рамнината лежи на трагот на корените:

$$\begin{gathered}\left[\angle(s-z_1)+\angle(s-z_2)+\angle(s-z_3)+\ldots\ldots\angle(s-z_m)\right]-\\ -\left[\angle(s-p_1)+\angle(s-p_2)+\angle(s-p_3)+\ldots\ldots\angle(s-z_n)\right]=\pm\pi+2k\pi=\pm(2k+1)\pi\end{gathered} \tag{9.6}$$

9.6 Правила за конструкција на траг на корени

Нека е потребно да се исцрта трагот на корени за следниот општ систем во т.н каноничен облик со преносна функција во директната патека $G_0(s)$, и преносна функција во повратната патека $H(s)$:



9-A
Слика 9.~~6~~. Општ систем во каноничен облик

Преносната функција на отворена врска за системот на слика 9.6 е $G_0(s)H(s)$. Ако оваа преносна функција има полови $p_1, p_2, ..., p_n$, нули $z_1, z_2, ..., z_m$, и K е константа, тогаш $G_0(s)H(s)$ може да се напише во облик:

$$G_0(s)H(s) = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)........(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)........(s-p_n)}$$

Преносната функција на затворена врска (преносната функција на системот) е:

$$\frac{\theta_0(s)}{\theta_0(s)}=\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)H(s)} \tag{9.7}$$

Половите на системот со затворена врска (точките што лежат на трагот на корените) се решенијата на карактеристичната равенка на системот, т.е. решенијата на полиномот во именителот на преносната функција на затворена врска (9.7):

$$1+G_0(s)H(s)=0 \tag{9.8}$$

или

$$G_0(s)H(s)=-1 \tag{9.9}$$

Во параграф 9.5 беше покажано дека равенката (9.9) е еквивалентна на следните две равенки:

$$\left|G_0(s)H(s)\right|=1 \tag{9.10}$$

$$\arg\left[G_0(s)H(s)\right]=-180^\circ \tag{9.11}$$

Трагот на корените за системот на слика (9.~~6~~) 9-A го сочинуваат оние точки во s рамнината што ги задоволуваат равенките (9.10) и (9.11). Постојат правила што значајно го олеснуваат исцртувањето на трагот на корените, т.е. одредувањето на точките што ги задоволуваат равенките (9.10) и (9.11). Тие правила се следните:

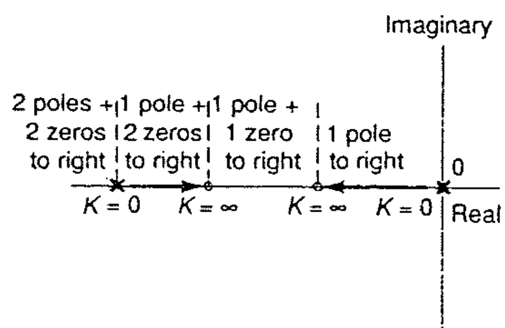
1. Бројот на гранки што го сочинуваат трагот на корените е еднаков на редот n на карактеристичната равенка (именителот) на преносната функција на отворена врска $G_0(s)H(s)$, т.е. еднаков е на бројот на полови на $G_0(s)H(s)$.

2. Гранките на трагот на корените секогаш поаѓаат од половите на $G_0(s)H(s)$, каде $K = 0$ (види р-ка (9.3)), и завршуваат или на нулите на $G_0(s)H(s)$, каде $K = \infty$, или во бесконечност (т.е. ако бројот на полови n на $G_0(s)H(s)$ е поголем од бројот на нули m, тогаш $(n-m)$ гранки на трагот на корени завршуваат во бесконечност).

3. Трагот на корени е симетричен во однос на реалната оска (затоа што комплексните полови секогаш се јавуваат во пар од облик $\sigma \pm j\omega$).

4. Трагови на реалната оска има лево од непарен број полови и нули (види слика 9-10) ако $K > 0$. За $K < 0$ трагови на реалната оска има лево од парен број полови и нули.

K>0



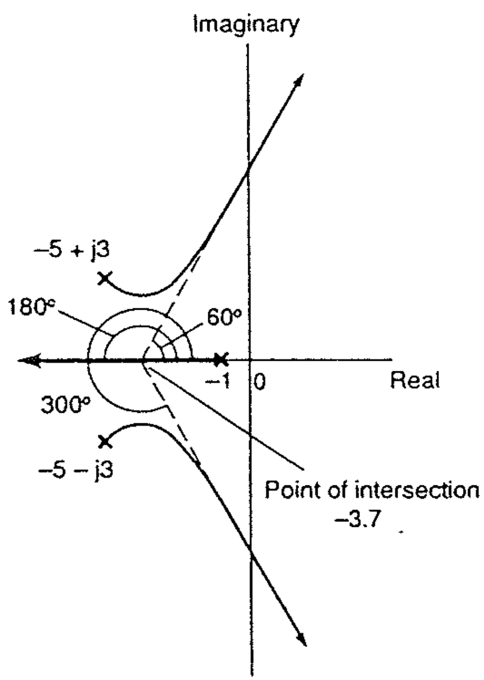
Слика 9.10. Трагови на реалната оска

5. Траговите на корени што завршуваат во бесконечност се стремат кон асимптоти што со позитивната оска градат агли

$$\beta_i = \frac{(2l+1)}{n-m}180^\circ, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n-m-1 \qquad \text{за} \quad K > 0 \tag{9.12}$$

$$\beta_i = \frac{2l}{n-m}180^\circ, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n-m-1 \qquad \text{за} \quad K < 0 \tag{9.13}$$

каде n е бројот на полови, m е бројот на нули на преносната функција на отворена врска $G_0(s)H(s)$ (види слика 9.11).



Слика 9.11. Асимптоти со $n = 3$, $m = 0$

6. Асимптотите се сечат во точка на реалната оска наречена центар на асимптоти и дефинирана со

$$\sigma_c = -\frac{\sum_{1}^{n} p_i - \sum_{j}^{m} z_j}{n-m} \tag{9.14}$$

каде $p_1, p_2, ..., p_n$ се половите на преносната функција на отворена врска $G_0(s)H(s)$, $z_1, z_2, ..., z_m$ се нулите, n е бројот на полови, m е бројот на нули.

7. Точката на пресек на трагот на корени со имагинарната оска може да се одреди со пресметување на оние вредности на K што резултираат во постоење на полови на $G_0(s)H(s)$ што имаат само имагинарен дел, т.е. полови $s = \sigma \pm j\omega$ со $\sigma = 0$.

На пример ако карактеристичната равенка на преносната функција $G_0(s)H(s)$, т.е. именителот на таа преносна функција, е

$$s^3 + 2s^2 + 3s + K$$

тогаш со замена $s = j\omega$, се добива

$$-j\omega^3-2\omega^2+3j\omega+K=-2\omega^2+K+j\left(-\omega^3+3\omega\right)=0$$

Со изедначување на нула на имагинарниот дел се добива

$$\left(-\omega^3+3\omega\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \omega=\sqrt{3}$$

Со изедначување на нула на реалниот дел се добива

$$\left(-2\omega^2+K\right)=0 \quad \Rightarrow \quad K=2\omega^2=6$$

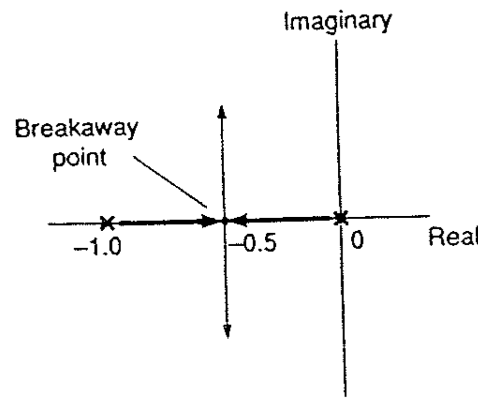
Значи точката на имагинарната оска $s=\pm j\sqrt{3}$ припаѓа на трагот на корените и се добива за $K=6$.

Алтернативно точката на пресек на трагот на корени со имагинарната оска може да се одреди од Ротовата табела со одредување на вредноста на K за која во редот s^1 се добиваат само нули, и со решавање на равенката

$$As^2+B=0 \qquad (9.15)$$

каде A и B се коефициентите што се наоѓаат во редот s^2 од Ротовата табела (во овие коефициенти се појавува непознатата вредност на K).

8. Точка на разгранување е онаа точка на реалната оска во која два или повеќе гранки од траговите на корени пристигнуваат и се разгрануваат во посебни гранки (види слика 9.12).



Слика 9.12. Точка на разгранување за систем со $G_0(s)=\frac{K}{s(s+1)}, \quad H(s)=1$

Точки на разгранување се оние за кои, покрај условите (9.10) и (9.11) важи

$$dK/ds=0 \tag{9.16}$$

каде зависноста на K од s се добива од карактеристичната равенка на системот (именителот на преносната функција на затворена врска - равенка (9.7).

На пример за системот на слика 9.12

$$\frac{\theta_0(s)}{\theta_0(s)}=\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)H(s)}=\frac{K}{s^2+s+K}$$

Оттука

$$s^2+s+K=0 \quad \Rightarrow \quad K=-s^2-s$$

$$\frac{dK}{ds}=-2s-1$$

$$dK/ds=0 \quad \Rightarrow \quad s=-1/2$$

Значи точката на разгранување е во $s=-1/2$ (слика 9.12).

9. Аголот под кој трагот на корените напушта некој комплексен пол s_i е даден со равенката

$$\alpha_p=180^\circ+\arg(G_0H)' \tag{9.17}$$

каде $\arg(G_0H)'$ е аргументот на преносната функција на отворена врска $G_0(s)H(s)$ пресметан за комплексниот пол s_i, ако се игнорира придонесот на полот s_i.

Аголот под кој трагот на корените пристигнува на некоја комплексна нула s_j е даден со равенката

$$\alpha_z = 180^\circ - \arg(G_0 H)'' \tag{9.18}$$

каде $\arg(G_0 H)''$ е аргументот на преносната функција на отворена врска $G_0(s)H(s)$ пресметан за комплексната нула s_j, ако се игнорира придонесот на нулата s_j.

9.7 Процедура за конструкција на траг на корени

Со користење на правилата изложени во претходниот параграф, траг на корени се конструира преку следната процедура:

1. Одреди ја преносната функција на преносната функција на отворена врска $G_0(s)H(s)$, каде $G_0(s)$ е преносната функција во директната патека, $H(s)$ е преносната функција во повратната патека на системот.

2. Одреди ја положбата на нулите и половите на преносната функција на отворена врска $G_0(s)H(s)$, т.е. нацртај ја пол-нула мапата на $G_0(s)H(s)$.

3. Одреди го бројот на гранки на трагот на корените со користење на правилото 1 од претходниот параграф.

4. Исцртај ги траговите на реалната оска со користење на правилото 4 од претходниот параграф.

5. Одреди ги аглите на асимптотите со користење на правилото 5 од претходниот параграф.

6. Одреди го центарот на асимптотите со користење на правилото 6 од претходниот параграф.

7. Одреди ги пресекот на трагот на корените со имагинарната оска со користење на правилото 7 од претходниот параграф. (овој чекор не е секогаш потребен)

8. Одреди ги точките на разгранување со користење на правилото 8 од претходниот параграф. (овој чекор не е секогаш потребен.

9. Ако има комплексни полови или нули, одреди ги аглите на напуштање на трагот на корени на комплексните полови или аглите на пристигнување на трагот на корени на комплексните нули (равенки (9.17) и (9.18)).

9.8 Анализа со трагови на корени

Трагот на корени покажува каков ефект има варијацијата на засилувањето K врз корените на карактеристичната равенка на системот (половите на преносната функција на системот со затворена врска), односно врз динамичките карактеристики на системот.

Преносната функција на затворена врска за систем од втор ред може да се претстави со

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \tag{9.19}$$

каде ω_n е природната кружна фреквенција и ξ е коефициентот на пригушување. Ако ξ е помеѓу 0 и 1, тогаш половите на $G(s)$, т.е. нулите на именителот на (9.19) се комплексни, и предизвикуваат осцилаторен излез од системот. Во овој случај може да се напише

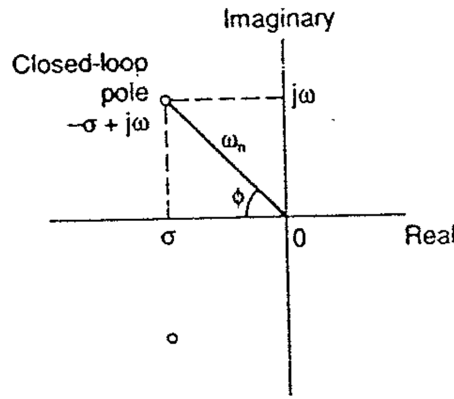
$$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=(s+\sigma+j\omega)(s+\sigma-j\omega)=s^2+2\sigma s+\sigma^2+\omega^2$$

Оттука

$$2\xi\omega_n=2\sigma \quad\Rightarrow\quad \xi=\frac{\sigma}{\omega_n} \tag{9.20}$$

$$\omega_n^2=\sigma^2+\omega^2 \tag{9.21}$$

Од равенката (9.21) може да се заклучи дека ω_n е должината на отсечката што го поврзува координатниот почеток во s-рамнината и полот на преносната функција на затворена врска (т.е. точката на трагот на корените) - види слика 9.14.

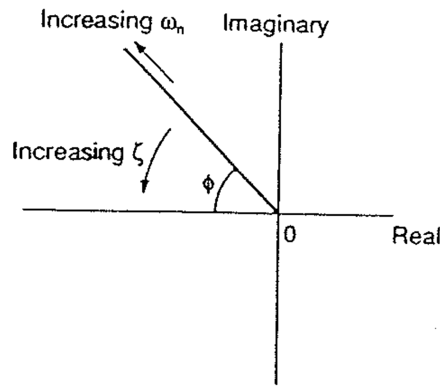


Слика 9.14. Комплексни полови

Од равенката (9.20) и слика 9.14 може да се заклучи дека

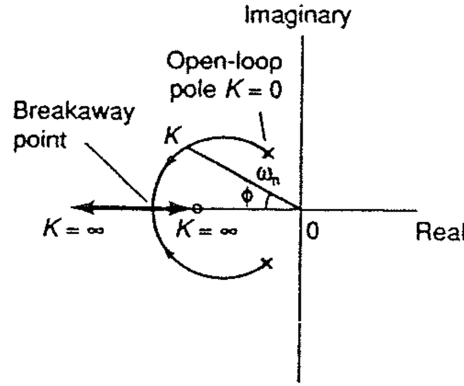
$$\xi = \frac{\sigma}{\omega_n} = \cos\phi \tag{9.22}$$

Значи ако аголната фреквенција со која осцилира излезот од системот треба да се зголеми, тогаш мора да се зголеми должината на отсечката што ги поврзува полот на преносната функција на затворена врска и координатниот почеток. Ако е потребно да се зголеми пригушувањето, тогаш мора да се намали аголот ϕ помеѓу отсечката што ги поврзува полот на преносната функција на затворена врска и координатниот почеток и реалната оска (слика 9.15).



Слика 9.15. Аголна фреквенција и коефициент на пригушување

На слика 9.16 илустриран е ефектот од промената на коефициентот на засилување K на системот врз природната фреквенција ω_n и коефициентот на пригушување ξ. Во овој случај најмалата вредност на природната фреквенција се добива за $K=0$ затоа што за таа вредност на K најкратка е отсечката што поврзува било која пол што лежи на трагот на корените со координатниот почеток. Ова во исто време е и најмала вредност на коефициентот на пригушување $\xi=\dfrac{\sigma}{\omega_n}=\cos\phi$ (слика 9.16). Со пораст на K растат и ω_n и ξ се додека не се достигне точката на разгранување во која $\xi=1$, и пригушувањето е критично. Натамошниот пораст на K резултира со појава само на реални корени (полови на системот), т.е. нема да има осцилаторен одзив од системот.



Слика 9.16. Ефекти од промената на K врз ω_n и ξ.

Промената на природната кружна фреквенција и/или коефициентот на пригушување резултира и во промена на останатите динамички параметри на системот: време на успон, прескок, и време на воспоставување (види Глава 3). На пример времето на воспоставување е дадено со

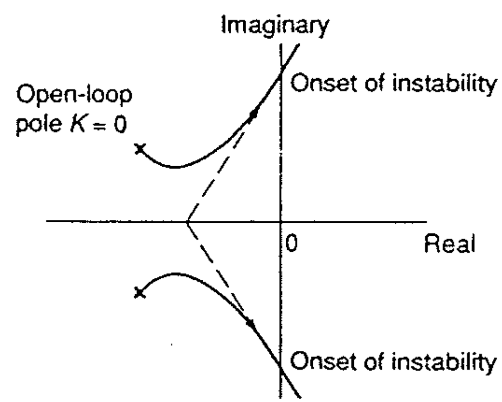
$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \tag{9.23}$$

Со оглед дека $\xi = \frac{\sigma}{\omega_n}$ (р-ка (9.20) следи $t_s = \frac{4}{\sigma}$. (9.24)

Времето на успон е дадено со равенка (3.25): $t_r = \frac{\pi}{2\omega}$ (9.25)

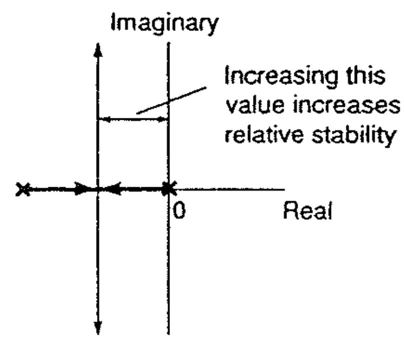
Значи со пораст на $\omega = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ се намалува времето на успон.

Трагот на корени може да се искористи и за анализа на ефектот на промена на засилувањето K врз стабилноста на системот. Еден систем е стабилен за оние вредности на K за кои трагот на корени е во левата половина од s рамнината. Системот е гранично стабилен за онаа вредност на K за која трагот на корените ја сече имагинарната оска, и е нестабилен за оние вредности на K за кои трагот на корените е во десната половина од рамнината. На пример, за системот на слика 9.17 нестабилноста на системот започнува од онаа вредност на K за која трагот на корените ја сече имагинарната оска. За $K = 0$ половите на преносната функција на затворена врска (половите на системот) се поклопуваат со половите на системот со отворена врска (слика 9.17). Со пораст на K трагот на корени (половите на преносната функција на затворена врска) започнува да се движи од левата кон десната половина од s рамнината. Системот е стабилен се додека половите (трагот на корените) се наоѓаат во левата половина од рамнината.



Слика 9.17. Влијание на засилувањето K врз стабилноста на системот

Релативната стабилност на еден систем може да се оцени преку оддалеченоста на неговиот траг на корени од имагинарната оска. Системот постанува се постабилен со оддалечување на неговиот траг на корени од имагинарната оска во левата половина од $s-$рамнината. Следствено на ова, еден систем е релативно постабилен од друг систем ако трагот на корени му е пооддалечен во однос на имагинарната оска, а се наоѓа во левата половина од $s-$рамнината (слика 9.18).



Слика 9.18. Релативна стабилност

Системи од повисок ред (системи со повеќе полови) можат да бидат упростени преку таканаречената **пол-нула апроксимација**. Ако некои полови или нули се значително поблиску до координатниот почеток од останатите, тогаш тие ќе доминираат во динамичкото однесување на системот и фреквенцијата и коефициентот на пригушување што се последица од нив со доволна точност ќе го опишат однесувањето на системот. Половите и нулите што се најблиску до координатниот почеток во s рамнината се наречени **доминантни полови и нули.** Ако реалниот дел на доминантните полови или нули е повеќе од 5 пати помал од реалниот дел на останатите полови и нули, тогаш може да се занемари влијанието на останатите полови и нули. Со тоа се упростува преносната функција и се спроведува анализата со трагови на корени само со доминантните полови и нули.

За да се илустрира доминантната пол-нула апроксимација, ќе се разгледа системот претставен со преносната функција на затворена врска:

$$G(s)=\frac{5}{(s+1)(s+5)}$$

Корените на карактеристичната равенка, т.е. половите на системот се -1 и -5. Одзивот на системот на единечна импулсна функција е

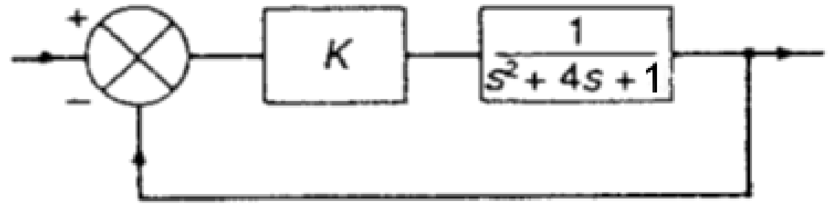
$$\theta_0(s)=G(s)\theta_i(s)=\frac{5}{(s+1)(s+5)}\times 1=\frac{5}{(s+1)(s+5)}$$

$$\theta_0(t)=5\times 0.25\left(e^{-t}-e^{-5t}\right)$$

Членот e^{-5t} многу побргу се губи од членот e^{-t}, така што неговото влијание може да се занемари, односно може да се смета дека одзивот е

$$\theta_0(t)\approx 5\times 0.25\, e^{-t}$$

Скицирај го трагот на корени за системите прикажани на слика 9.19 и за системите од втор ред одреди ја вредноста на засилувањето K за кое системите се критично пригушени.



(c)

Да се нацрта трагот на корени за систем со преносна функција на отворено коло G(s) и единечна повратна врска. Да се одреди стабилноста на системот.

$$G(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)} \qquad G(s)=\frac{K(s+1)}{(s+2+j3)(s+2-j3)}$$