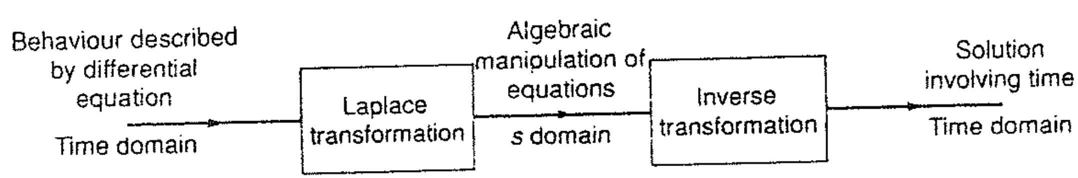
Глава 4. Лапласова трансформација

Лапласовата трансформација е метод за трансформација на диференцијални равенки во алгебарски равенки чие решавање е поедноставно. Во оваа Глава прикажана е примената на Лапласовата трансформација за решавање на проблеми дефинирани преку диференцијални равенки.

Диференцијалните равенки што ја опишуваат промената на излезниот сигнал од еден управувачки систем во тек на времето со помош на Лапласовата трансформација се трансформираат во едноставни алгебарски равенки што не го вклучуваат времето како променлива и коишто овозможуваат примена на класичните алгебарски манипулации со големините. Значи зависностите помеѓу влезниот и излезниот сигнал од временски домен се трансформираат во таканаречен s-домен во кој можат да се применат алгебарски манипулации. Потоа, со цел да се добие опише како излезниот сигнал се менува во тек на времето, се применува инверзна Лапласова трансформација, т.е. се врши трансформација од s-доменот во временски домен (слика 4.1).



Слика 4.1 Лапласова трансформација

Функција *f(t)*	Функција *F(s)*	Име на функцијата
$\delta(t)$	1	Импулсна функција
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	Отскочна функција
$r(t), t$	$\frac{1}{s^2}$	Нагибна функција
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	Експоненцијална функција
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	Синусна функција
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	Косинусна функција
$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	Пригушена синусна функција
$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$	Пригушена косинусна функција

4.3. ОСОБИНИ НА ЛАПЛАСОВАТА ТРАНСФОРМАЦИЈА

За среќа обично не е потребно да се пресметуваат интегралите од облик (4.1) при примената на Лапласовата трансформација затоа што постојат табели во кои се дадени Лапласовите трансформации од функциите што најчесто се среќаваат. Овие табели заедно со некои основни правила за примена на трансформациите овозможуваат решавање на најголем дел од проблемите.

Основните правила се:

1. Лапласова трансформација на збир/разлика од две временски функции е збир/разлика од Лапласовите трансформации на тие функции.

$$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = L(f_1(t)) \pm L(f_2(t)) = F_1(s) \pm F_2(s)$$

   каде $L(\cdot)$ означува Лапласова трансформација од $(\cdot)$.

2. Лапласова трансформација на производ на некоја временска функција со константа е еднаков на производ на Лапласовата трансформација на таа функција со таа константа, т.е.

$$L[af(t)] = aL(f(t)) = aF(s)$$

3. Лапласова трансформација од функција што касни T временски единици, т.е функција $f(t-T)$, е еднаква на $e^{-Ts}F(s)$, каде $T \geq 0$, $F(s)=L(f(t))$:

$$L(f(t-T))=e^{-Ts}F(s)$$

4. Лапласова трансформација од првиот извод на некоја функција $f(t)$ е еднаков на

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0)$$

каде $F(s)=L(f(t))$, $f(0)$ е вредноста на функцијата f за $t=0$.

5. Лапласова трансформација од вториот извод на некоја функција $f(t)$ е еднаков на

$$L\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right]=s^2F(s)-sf(0)-\frac{df(0)}{dt}$$

каде $F(s)=L(f(t))$, $\frac{df(0)}{dt}$ е вредноста на првиот извод на функцијата f за $t=0$.

6. Лапласова трансформација од интегралот на некоја функција $f(t)$ помеѓу 0 и t е еднаков на

$$L\left[\int_0^t f(t)\right]=\frac{1}{s}F(s)$$

каде $F(s)=L(f(t))$.

7. Лапласова трансформација од полином помеѓу 0 и *t* е:

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

8. Лапласова трансформација од функција помножена со e^{-at} помеѓу 0 и *t* е:

$$L[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$$

Теоремата за почетна вредност гласи:

Вредноста на една функција $f(t)$ во почетниот момент $t=0$ е еднаква на вредноста на производот $sF(s)$ кога $s \to \propto$:

$$\lim_{s \to \propto} sF(s) = \lim_{t \to 0} f(t)$$

Теоремата за крајна вредност гласи:

Крајната вредност на една функција $f(t)$ кога $t \to \propto$ е еднаква на вредноста на производот $sF(s)$ кога $s=0$:

$$\lim_{s \to 0} sF(s) = \lim_{t \to \propto} f(t)$$

4.3. ПРИМЕНА НА ЛАПЛАСОВАТА ТРАНСФОРМАЦИЈА ЗА РЕШАВАЊЕ НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Процедурата за решавање на диференцијални равенки со користење на Лапласовата трансформација е следна:

1. Трансформирај го секој член на диференцијалната равенка во неговата Лапласова трансформација, т.е. изврши замена на временските функции со функции во s-домен.
2. Изврши ги сите потребни алгебарски манипулации во равенката во s-домен добиена во претходниот чекор.
3. Изврши инверзна Лапласова трансформација, т.е. конвертирај ја резултирачката Лапласова функција добиена во чекор 2 со примена на табела на Лапласови трансформации. За да стандардните форми дадени во оваа табела можат да се користат претходно е потребно да се изврши развој на прости дропки на резулатирачката Лапласова функција (види параграф 4.4).

4.4. РАЗВОЈ НА ПРОСТИ ДРОПКИ

Процесот на конверзија на еден алгебарски израз во збир или разлика од едноставни дропки е наречен развој на прости дропки. На пример таква е конверзијата на изразот

$$\frac{3x+4}{x^2+3x+2}$$

во збирот од следните дропки

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}$$

За да еден алгебарски израз се развие во прости дропки мора прво неговиот именител да се факторизира (на пример во горните равенки именителот $\left(x^2+3x+2\right)$ ги дава факторите $(x+1)$ и $(x+2)$) и полиномот во броителот во алгебарскиот израз мора да биде барем еден степен помал од полиномот во именителот (во горните равенки степенот на полиномот во броителот е 1, а на именителот е 2). Кога степенот на броителот е еднаков или поголем од степенот на именителот, тогаш броителот мора да се подели со именителот за да се добијат членови коишто ќе имаат броители чии степени се помали од степените на именителите.

Постојат во основа следните три видови на развој на прости дропки:

1. Линеарни фактори во именителот

Израз

$$\frac{f(s)}{(s+a)(s+b)(s+c)}$$

Развој на прости дропки

$$\frac{A}{s+a}+\frac{B}{s+b}+\frac{C}{s+c}$$

2. Линеарни фактори што се повторуваат во именителот

Израз

$$\frac{f(s)}{(s+a)^n}$$

Развој на прости дропки

$$\frac{A}{s+a}+\frac{B}{(s+a)^2}+\frac{C}{(s+a)^3}+\dots\dots+\frac{N}{(s+a)^n}$$

3. Квадратни фактори во именителот, што не можат понатаму да се факторизираат без да се појават имагинарни членови

Израз $$\frac{f(s)}{ax^2+bx+c}$$

Развој на прости дропки $$\frac{As+B}{as^2+bs+c}$$ или

Израз $$\frac{f(s)}{(ax^2+bx+c)(s+d)}$$

Развој на прости дропки $$\frac{As+B}{as^2+bs+c}+\frac{C}{s+d}$$

Без оглед на обликот на развојот на прости дропки, вредностите на коефициентите A, B, C, итн., се добиваат со комбинирање на простите дропки во израз што има ист именител како и оригиналната равенка, и со изедначување на коефициентите на полиномите во броителите. На пример

$$\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

$$\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$3x+4=A(x+2)+B(x+1)=(A+B)x+2A+B$$

Значи

$$3=A+B$$

$$4=2A+B$$

откаде $A=1, B=2,$ или

$$\frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}$$

Да се решат следните диференцијални равенки со помош на Лапласовата трансформација

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2}+3\frac{d\theta_o}{dt}+2\theta_o=u(t) \qquad \frac{d\theta_o}{dt}=2, \quad \theta_o=-1, \quad t=0$$

$$\frac{d^2\theta_o}{dt^2}+3\frac{d\theta_o}{dt}+2\theta_o=1+r(t) \qquad \frac{d\theta_o}{dt}=1, \quad \theta_o=0, \quad t=0$$

Глава 5. Преносни функции на динамички системи

5.1. Вовед

Во Глава 1 управувачките системи беа разгледувани во стационарни услови, т.е. преносната функција се претпоставуваше дека не се менува со тек на време. Притоа не беше анализирано како излезот од системот се менува со тек на време со промена на влезот. Во Глава 2 при анализа на основните градбени блокови за управувачките системи се појавија временски зависни релации помеѓу влезовите и излезите од системите што беа изразени преку диференцијални равенки. Во Главите 3 и 4 беа прикажани начините за решавање на тие диференцијални равенки. Во оваа Глава врз база на знаењата од претходните четири Глави се разгледува однесувањето на управувачките системи кога промените во тек на времето не се игнорираат, т.е. се разгледува динамичкото однесување на управувачките системи.

5.2. Преносни функции од динамички елементи

Нека се претпостави дека имаме систем во кој влезот θ_i е поврзан со излезот θ_0 преку диференцијалната равенка

$$a_2 \frac{d^2\theta_0}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta_0}{dt} + a_0\theta_0 = b_0\theta_i \tag{5.1}$$

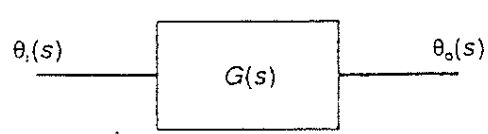
каде a_2, a_1, a_0, b_0 се константи. Ако сите почетни услови на системот се нула тогаш Лапласовата трансформација на оваа равенка е

$$a_2 s^2 \theta_0(s) + a_1 s \theta_0(s) + a_0 \theta_0(s) = b_0 \theta_i(s)$$

$$\frac{\theta_0(s)}{\theta_i(s)} = \frac{b_1}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Преносната функција $G(s)$ на линеарен систем што го опишува динамичкото однесување на системот е дефинирана како однос на Лапласовата трансформација на излезната променлива $\theta_0(s)$ и Лапласовата трансформација на влезната променлива $\theta_i(s)$, кога сите почетни услови се претпоставува дека се нула (во Глава 2 е дадено објаснување на поимот линеарен систем). Оттука за системот опишан со равенката (5.1) преносната функција е

$$G(s) = \frac{\theta_0(s)}{\theta_i(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{5.2}$$



Слика 5.1. Претставување на систем со преносна функција $G(s)$ со блок дијаграм

Диференцијалната равенка на елемент од втор ред има облик (види Глава 3)

$$a_2 \frac{d^2\theta_0}{dt^2} + a_1 \frac{d\theta_0}{dt} + a_0\theta_0 = b_0\theta_i \qquad (5.6)$$

каде θ_0 е излезот од системот, θ_i е влезот во системот, a_2, a_1, a_0, b_0 се константи.

Соодветната Лапласова трансформација на равенката (5.6), под услов $\theta_0 = 0$ и $d\theta/dt = 0$ кога $t = 0$, е

$$a_2 s^2\theta_0(s) + a_1 s\theta_0(s) + a_0\theta_0(s) = b_0\theta_i(s)$$

Оттука

$$G(s) = \frac{\theta_0(s)}{\theta_i(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b_0/a_0}{\left(a_2/a_0\right)s^2 + \left(a_1/a_0\right)s + 1} \qquad (5.7)$$

Во Глава 3 (равенка (3.13)) беше кажано дека диференцијалната равенка за систем од втор ред може да се напише како

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{d\theta_0}{dt} + \omega_n^2\theta_0 = b_0\omega_n^2\theta_i \qquad (5.8)$$

каде ω_n е природна кружна фреквенција со која системот слободно ќе осцилира во отсуство на било какво пригушување и ζ е коефициентот на пригушувањето во системот. Лапласовата трансформација на (5.8) е

$$s^2\theta_0(s)+2\zeta\omega_n s\theta_0(s)+\omega_n^2\theta_0(s)=b_0\omega_n^2\theta_i(s)$$

Оттука

$$G(s)=\frac{\theta_0(s)}{\theta_i(s)}=\frac{b_0\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \tag{5.9}$$

Равенката (5.9) е општиот облик на излезно-влезната зависност во s домен за систем од втор ред.

Табела 5.2. Одзив од систем од втор ред за различни влезни сигнали

<table>
<tr><td colspan="3">Систем од втор ред со преносна функција (равенка 5.16)
$$G(s)=\frac{\theta_0(s)}{\theta_i(s)}=\frac{b_0\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Влезен сигнал</td><td>Излезен сигнал</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Единечна отскочна функција</td><td>t – домен
$\theta_i(t)=1$ за
$t\geq 0$</td><td rowspan="2">Случај 1. $\zeta>1$
$$\theta_0=1+\left[-\frac{b_0\zeta}{2\sqrt{(\zeta^2-1)}}-\frac{b_0}{2}\right]\exp\left\{\left[-\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{(\zeta^2-1)}\right]t\right\}+\left[\frac{b_0\zeta}{2\sqrt{(\zeta^2-1)}}-\frac{b_0}{2}\right]\exp\left\{\left[-\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{(\zeta^2-1)}\right]t\right\}$$
Случај 2. $\zeta=1$
$$\theta_0=b_0\left[1-\exp(-\omega_n t)-\omega_n t\exp(-\omega_n t)\right]$$
Случај 3. $\zeta<1$
$$\theta_0=b_0\left[1-\frac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}\exp(-\zeta\omega_n t)\sin\left[\omega_n\sqrt{(1-\zeta^2)}\,t+\phi\right]\right]$$
каде $\cos\phi=\zeta$.</td></tr>
<tr><td>s – домен
$\theta_i(s)=1/s$</td></tr>
</table>

Единечна нагибна функција	t – домен $\theta_i(t)=t$ за $t \geq 0$ s – домен $\theta_i(s)=1/s^2$	$\theta_0 = b_0\left[t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + C\exp(m_1 t) + D\exp(m_2 t)\right]$ $C = \frac{\zeta}{\omega_n} + \frac{2\zeta^2-1}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$ $D = \frac{\zeta}{\omega_n} - \frac{2\zeta^2-1}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$ $m_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$ $m_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$
Единечна импулсна функција	t – домен $\theta_i(t)=\propto$ за $t=0$ и $\theta_i(t)=0$ за $t \neq 0$ s – домен $\theta_i(s)=1$	$\theta_0 = A\exp(m_1 t) + B\exp(m_2 t)$ $A = -B = \frac{b_0\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}$ $m_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$ $m_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$

Роботска рака има преносна функција :

$$G(s)=\frac{K}{(s+3)^2}$$

Да се напише зависноста помеѓу излезот (позицијата на раката) и времето, кога раката е подложена на единечен нагибен влез.

Систем од втор ред има коефициент на пригушување еднаков на 0.2, слободна кружна фреквенција еднаква 5 Hz, и стационарна преносна функција еднаква на 2. Која е зависноста помеѓу излезот и влезот во системот во s-домен и колкав е пресокот во проценти кога на системот се доведе отскочен влез?