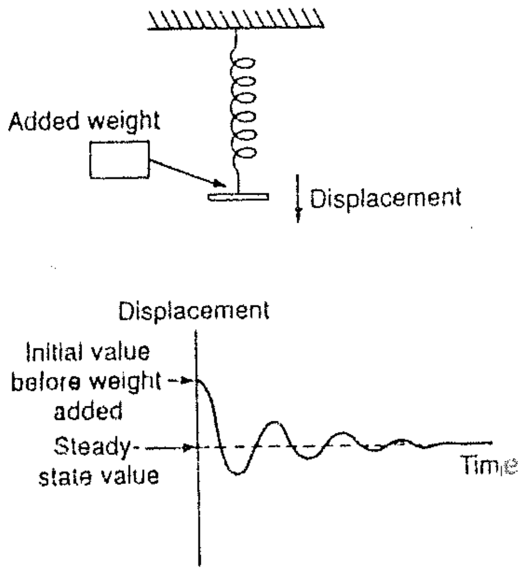
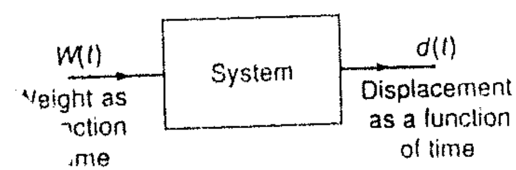
Глава 3. Одзив од систем

Вкупниот одзив од еден управувачки систем, или елемент од еден управувачки систем, се состои од два одзива: стационарен одзив и преоден одзив. Преодниот одзив е оној дел од стационарниот одзив што настанува кога постои промена на влезот во системот и што се губи (исчезнува) по краток временски интервал. Стационарниот одзив е одзивот што останува кога сите преодни одзиви ќе исчезнат.



Слика 3.1. Преоден и стационарен одзив од системот пружина-товар



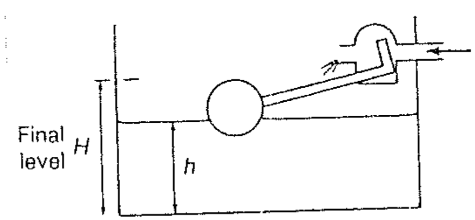
Слика 3.2. Модел на системот пружина-товар

3.2. Пример на систем од прв ред

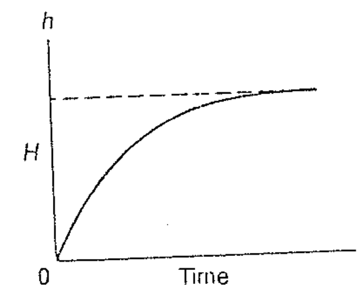
Пример на систем од прв ред е резервоар во кој нивото на вода се управува со пловак (слика 3.3). Брзината со која водата влегува во резервоарот, односно брзината на подигање на висината на водата во резервоарот во текот на времето, е правопропорционална со разликата помеѓу висината h на водата во резервоарот и висината H на која пловакот го прекинува доводот на вода во резервоарот, т.е.

$$\frac{dh}{dt} = k(H - h) \tag{3.1}$$

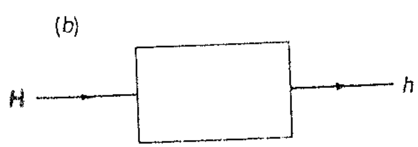
каде dh/dt е брзината на промена на висината и k е константа.



Слика 3.3. Резервоар во кој нивото се управува со пловак



Слика 3.4. Висина на водата во тек на времето



Слика 3.5. Модел на системот

$$h = H\left(1 - e^{-kt}\right)$$

3.3 Диференцијални равенки од прв ред

Во општ случај диференцијална равенка од прв ред има облик

$$a_1 \frac{d\theta_0}{dt} + a_0\theta_0 = b_0\theta_i \tag{3.2}$$

каде a_1, a_0, и b_0 се константи, θ_i е влезната функција во системот, θ_0 е излезот, $d\theta_0 / dt$ е брзината на промена на излезот во тек на времето.

3.4 Решавање на диференцијална равенка од прв ред

Постојат бројни методи за решавање на диференцијална равенка од прв ред. Еден општ метод е следниот.

Нека е дадена равенката (3.2)

$$a_1 \frac{d\theta_0}{dt} + a_0\theta_0 = b_0\theta_i \tag{3.3}$$

$$\theta_0 = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)\theta_i \left[1 - \exp\left(-a_0 t / a_1\right)\right] \tag{3.7}$$

Табела 3.1. Најчести облици на форсиран одзив

Влезен сигнал θ_i	Вообичаен облик на форсиран одзив v
$\theta_i = \boldsymbol{const.}$ за $t > 0$ (отскочен влез)	$v = k$, каде k е константа
$\theta_i = a + bt + ct^2 + \dots\dots$	$v = a + bt + ct^2 + \dots\dots$, a, b, c се константи
$\theta_i = \sin(\omega t)$ или $\theta_i = \cos(\omega t)$	$v = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$, a и b се константи
$\theta_i = e^{\lambda t}$	$v = a\,e^{\alpha t}$ или $v = a\,e^{\alpha t} + bt\,e^{\alpha t}$, при што λ се разликува од корените на карактеристичната равенка α

Fig. 3.6 Input signals: (a) step, (b) impulse, (c) ramp, and (d) sinusoidal

На пример нека влезот во системот е отскочен сигнал што се случува во моментот $t = 0$ (слика 3.6). Согласно со табела 3.1 форсираниот одзив е

$$v = k$$

Слика 3.6. (а) Отскочен влез во систем од прв ред; (б) Одзив од системот

3.6. Оператор D

Еден начин за анализа на диференцијални равенки е преку воведување на оператор за диференцирање D што го заменува првиот извод, т.е. $D \equiv d/dt$. Во општ случај n-тиот извод $d^n\theta/dt^n$ се заменува со

$$D^n\theta = \frac{d^n\theta}{dt^n} \tag{3.11}$$

Со воведувањето на операторот D во една диференцијална равенка се овозможува примената на законите од алгебрата при решавањето на равенката. На пример

$$D\theta + \theta = (D+1)\theta$$

каде θ е променливата;

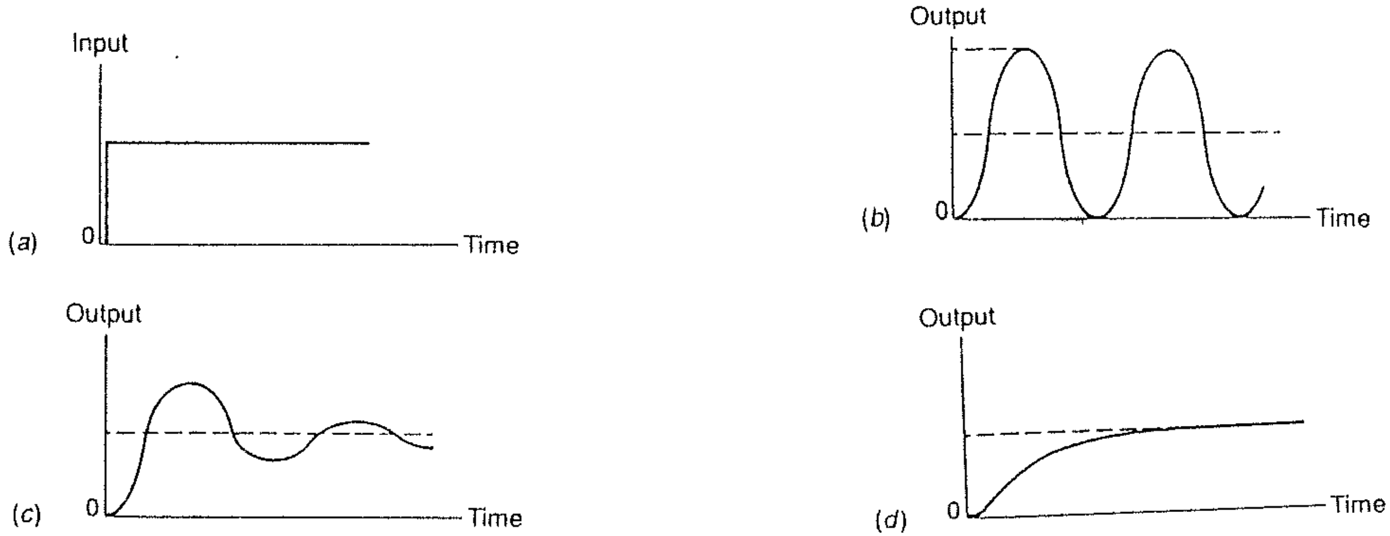
3.7 Пример на систем од втор ред

Пример за систем од втор ред е системот пружина-маса-пригушување (слика 3.8) чиј модел беше анализиран во параграф 2.9. Таму беше покажано дека диференцијална равенка што ја опишува зависноста помеѓу влезот во системот (силата F) и излезот од системот (поместувањето x) има облик:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F \tag{3.12}$$

каде k е коефициентот на крутост на пружината, c е коефициент на пригушувањето, m е масата.

Слика 3.8. Систем од втор ред: пружина-маса-пригушување



Слика 3.9. Видови на варијации на излезот во тек на времето: (a) отскочен влез; (b) без пригушување; (c) со некое пригушување; (d) со високо пригушување

Кога во системот постои пригушување, неговата диференцијална равенка од втор ред во општ случај има облик

$$\frac{d^2\theta_0}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{d\theta_0}{dt} + \omega_n^2\,\theta_0 = b_0\omega_n^2\,\theta_i \tag{3.13}$$

каде ω_n е кружна фреквенција со која системот слободно ќе осцилира во отсуство на било какво пригушување и ζ е коефициентот на пригушувањето во системот. Кога $\zeta = 0$ масата слободно ќе осцилира (слика 3.9 (b)); кога $\zeta < 1$ излезот е како на слика 3.9 (c); и кога $\zeta > 1$ излезот е како на слика 3.9 (d). Причините за ова ќе станат јасни во следниот параграф.

3.8. Решавање на диференцијална равенка од втор ред

Диференцијална равенка од втор ред може да се реши на ист начин како и диференцијалната равенка од прв ред (параграф 3.4). Значи ако се воведе замената

$$\theta_0 = u + v$$

каде θ_0 е вкупен одзив, u е преоден одзив и v е форсиран одзив, тогаш од равенката (3.13) следи

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{du}{dt} + \omega_n^2 u = 0 \tag{3.14}$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dv}{dt} + \omega_n^2 v = b_0\omega_n^2 \theta_i \tag{3.15}$$

За да се одреди преодниот одзив не е потребно да се знае каков облик има влезниот сигнал затоа што преодниот одзив не зависи од влезот. Значи потребно е да се реши (3.14) за да се одреди преодниот одзив. Нека решението се претпостави во облик

$$u = Ae^{st}$$

Тогаш, со оглед дека $du/dt = Ase^{st}$, $d^2u/dt^2 = As^2 e^{st}$, диференцијалната равенка (3.14) постанува

$$As^2 e^{st} + 2\zeta\omega_n Ase^{st} + \omega_n^2 Ae^{st} = 0$$

Со оглед дека $A e^{st} \neq 0$, мора

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \tag{3.16}$$

Равенката (3.16) е квадратна и има решенија

$$s_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{\left(4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2\right)}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{3.17}$$

Во зависност од големината на коефициентот на пригушувањето ζ постојат три можни случаи:

Случај 1. Кога $\zeta > 1$, равенката (3.17) има два различни реални корени s_1 и s_2:

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$
$$s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Во овој случај општото решение за преодниот одзив е:

$$u = A\exp\left(s_1 t\right) + B\exp\left(s_2 t\right) \tag{3.18}$$

и системот е наткритично пригушен ($\zeta > 1$).

Случај 2. Кога $\zeta = 1$, равенката (3.17) има два исти реални корени s_1 и s_2:

$$s_{1,2} = -\omega_n$$

Во овој случај општото решение за преодниот одзив е:

$$u = (At + B)\exp(-\omega_n t) \tag{3.19}$$

и системот е критично пригушен ($\zeta = 1$).

Случај 3. Кога $\zeta < 1$, равенката (3.17) има два различни комплексни корени s_1 и s_2:

$$s_2 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$s_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

Ако се воведе смената

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{3.20}$$

тогаш двата корена се

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega$$

Членот ω е кружната (аголната) фреквенција на движењето во услови кога во системот постои пригушување одредено со коефициентот на пригушување ζ.

Во овој случај општото решение за преодниот одзив е:

$$u = A\exp(-\zeta\omega_n + j\omega)t + B\exp(-\zeta\omega_n - j\omega)t$$

$$u = \exp(-\zeta\omega_n t)[A\exp(j\omega t) + B\exp(-j\omega t)]$$

Но

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$
$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

Оттука во овој случај општото решение за преодниот одзив е:

$$u = \exp(-\zeta\omega_n t)[(A+B)\cos(\omega t) + j(A-B)\sin(\omega t)] \tag{3.21}$$

и системот е поткритично пригушен ($\zeta < 1$).

Вкупното решение е збир од $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, т.е. збир од преодниот одзив и форсираниот одзив.

За наткритично пригушен систем ($\zeta > 1$) вкупниот одзив е:

$$\theta_0 = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\,\mathbf{exp}\left(\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{t}\right) + \boldsymbol{B}\,\mathbf{exp}\left(\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{t}\right) + \boldsymbol{b}_0\theta_i \tag{3.22}$$

За критично пригушен систем ($\zeta = 1$) вкупниот одзив е:

$$\theta_0 = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{B}\right)\mathbf{exp}\left(-\omega_n \boldsymbol{t}\right) + \boldsymbol{b}_0\theta_i \tag{3.23}$$

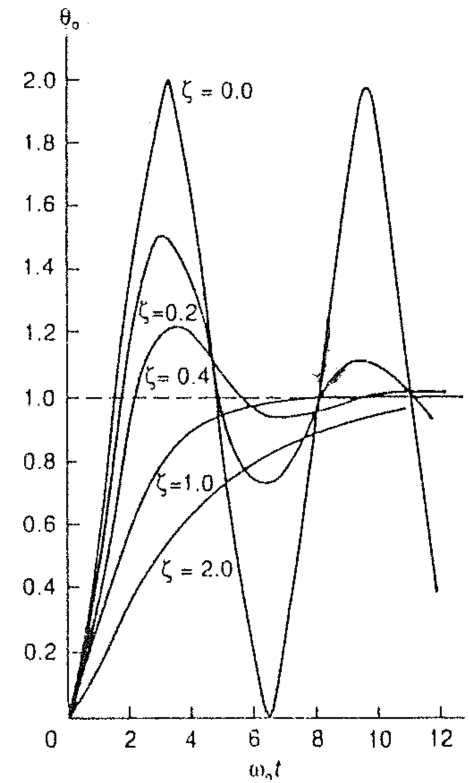
За поткритично пригушен систем ($\zeta < 1$) вкупниот одзив е:

$$\theta_0 = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \mathbf{exp}\left(-\zeta\omega_n \boldsymbol{t}\right)\left[\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\right)\mathbf{cos}\left(\omega t\right) + \boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\right)\mathbf{sin}\left(\omega t\right)\right] + \boldsymbol{b}_0\theta_i \tag{3.24}$$

Кога $\boldsymbol{t} \to \infty$ сите три решенија (3.22)-(3.24) конвергираат кон решението $\theta_0 = \boldsymbol{b}_0\theta_i$. Значи

$$\text{Стационарната преносна функција } \boldsymbol{G}_{ss} = \frac{\theta_0}{\theta_i} = \boldsymbol{b}_0 \tag{3.25}$$

На слика 3.10 прикажани се графови на одзивите од систем од втор ред во функција од времето за различни вредности на коефициентот на пригушување ζ. На временската оска е големината $\omega_n t$ (таканареченото нормализирано време), за да графовите одговараат на системи од втор ред без оглед на големината ω_n.



Слика 3.10. Одзив од систем од втор ред за единечен отскочен влез во системот

- Излезот од еден систем се менува во тек на времето согласно со следната диференцијална равенка:
- а) $\frac{d^2\theta_o}{dt^2}+13\frac{d\theta_o}{dt}+36\theta_o=36\theta_i$
- б) $\frac{d^2\theta_o}{dt^2}+4\frac{d\theta_o}{dt}+4\theta_o=4\theta_i$
- в) $\frac{d^2\theta_o}{dt^2}+2\frac{d\theta_o}{dt}+4\theta_o=4\theta_i$
- Да се пресметаат: непригушената фреквенција на системот, коефициентот на пригушување, решението на равенката кога почетните услови се $\frac{d\theta_o}{dt}=0, \quad \theta_o=0, \quad t=0$ и влезот во системот е единечна отскочна функција